

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023****CLASA a VII-a****Problema 1.** Determinați toate perechile (x, y) de numere reale care verifică relația

$$3 \cdot \left\{ \frac{3x+2}{3} \right\} + 4 \cdot \left[\frac{4y+3}{4} \right] = 4 \cdot \left\{ \frac{4y+3}{4} \right\} + 3 \cdot \left[\frac{3x+2}{3} \right] = 18.$$

Notățiile $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a .

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinați numerele întregi a, b, c, d care îndeplinesc simultan condițiile $a + b + c = 2d$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = d^2$.

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$ și se notează cu M mijlocul laturii CD . Perpendiculara din C pe BM intersectează dreptele BM și AB în punctele N , respectiv E . Dreapta BM intersectează dreapta AD în P , iar mijlocul segmentului BN se notează cu F . Arătați că:

- a) triunghiurile CBE și BAP sunt congruente;
- b) segmentele AN și DF sunt congruente și perpendiculare.

Problema 4. Fie triunghiul ABC care are $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Fie AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$, și $BE \perp AC$, $E \in AC$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE , iar cu P mijlocul lui CM . Arătați că $AC = 4 \cdot DP$.

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*