O problema de algebra pentru gimnaziu si liceu

Cerinta:

Rezolvati in multimea numerelor reale urmatorul sistem de ecuatii:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=34 \end{cases}$$

Solutia 1:

Fie $S=x+y$ si $P=xy$.

Sistemul devine $\begin{cases} S+z=4 \\ S^2-2P+z^2=14 \\ S^3-3PS+z^3=34 \end{cases}$

Astfel, din prima ecuatie rezulta ca $S=4-z$ si, inlocuind in a doua ecuatie, obtinem:

$(4-z)^2-2P+z^2=14 \Rightarrow 16-8z+z^2-2P+z^2=14 \Rightarrow 2-8z+2z^2=2P \Rightarrow P=1-4z+z^2$.

Inlocuind P si S in a treia ecuatie a sistemului se obtine:

$(4-z)^3-3(1-4z+z^2)(4-z)+z^3=34 \Rightarrow 64-48z+12z^2-z^3-3(4-z-16z+4z^2+4z^2-z^3)+z^3=34$

Va rezulta ca: $64-48z+12z^2-12+51z-12z^2-12z^2+3z^3=34 \Rightarrow 3z^3-12z^2+3z+18=0$

Impartind ultima egalitate prin 3, se obtine ecuatia echivalenta: $z^3-4z^2+z+6=0$.

Astfel :

$z^3-4z^2+z+6=z^3+z^2-5z^2-5z+6z+6=z^2(z+1)-5z(z+1)+6(z+1)=(z+1)(z^2-5z+6)$

Ecuatia initiala este echivalenta cu: $(z+1)(z^2-5z+6)=0$.

Rezulta $z+1=0$ sau $z^2-5z+6=0$.

Din $z+1=0 \Rightarrow z_1=-1$, iar din $z^2-5z+6=0 \Rightarrow \Delta=1$si $z_{2,3}=\dfrac{5\pm1}{2}$.

Astfel: $z_1=-1, z_2=2$ si $z_3=3$.

Cazul I:

Daca $z=-1$ va rezulta ca $S=5$ si $P=1+4+1=6$.

In consecinta $x+y=5$si $xy=6$.

Din prima ecuatie rezulta $y=5-x$ si, inlocuind in a doua ecuatie, se obtine $x(5-x)=6 \Rightarrow 5x-x^2=6$,: ecuatie echivalenta cu $x^2-5x+6=0$.

Avem $x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x-3)$, ecuatia fiind echivalenta cu $(x-2)(x-3)=0$, cu solutiile $x_1=2$ si $x_2=3$.

Daca $x=2\Rightarrow y=5-2=3$, iar in cazul $x=3\Rightarrow y=5-3=2$.

Am obtinut asfel solutiile (2,3,-1) si (3,2,-1).

Analog se trateaza cazurile $z=2$ si $z=3$, obtinand inca 4 solutii ale sistemului:

(-1,3,2), (3,-1,2), (-1,2,3) si (2,-1,3).

*Solutia este elementara utilizand deprinderi de calcul si putine formule, dar nu simpla . Poate fi utilizata la clasa a VIII-a (dupa studiul ecuatiei de gradul al II-lea, sau , la clasa a VII-a, dupa studiul descompunerii in factori, necesara pentru a putea rezolva ecuatia de gradul al II-lea rezultata).

Am propus aceasta problema elevilor de clasa a VIII-a, constatand ca cei care au rezultate bune la matematica au reusit sa rezolve. Le-am propus sa se grupeze in perechi , sa compuna un enunt similar pentru coleg, sa faca schimb de probleme si sa rezolve fiecare problema primita.

Solutia 2:

Consideram ecuatia de gradul al III-lea cu solutiile x,y si z:

$u^3-S_1u^2+S_2u-S_3=0$, unde $S_1=x+y+z=4$, $S_2=xy+yz+xz$, iar $S_3=xyz$.

Rezulta ca $S_1^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$.

Astfel $S_1^2=14+2S_2\Rightarrow 4^2=14+2S_2\Rightarrow S_2=1$.

De asemenea $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

Rezulta ca $34-3S_3=4(14-S_1)\Rightarrow 34-3S_3=4(14-1)\Rightarrow 34-3S_3=52\Rightarrow S_3=-6$.

Ecuatia initiala $u^3-4u^2+u+6=0$.

Observam ca $u=-1$ este solutie a ecuatiei: $(-1)^3-4(-1)^2-1+6=-1-4-1+6=0$.

Va rezulta ca $u+1$ divide u^3-4u^2+u+6.

Astfel.

$u^3-4u^2+u+6=u^3+u^2-5u^2-5u+6u+6=u^2(u+1)-5u(u+1)+6(u+1)=(u+1)(u^2-5u+6)$

Ecuatia initiala este echivalenta cu $(u+1)(u^2-5u+6)=0$.

Rezulta $u+1=0$ sau $u^2-5u+6=0$.

Din $u+1=0\Rightarrow u_1=-1$, iar din $u^2-5u+6=0\Rightarrow\Delta=1$ si $u_{2,3}=\dfrac{5\pm1}{2}$.

Astfel: $u \in \{-1, 2, 3\}$.

Sitemul fiind simetric va rezulta solutia:

$(x, y, z) \in \{(-1, 2, 3); (-1, 3, 2); (2, -1, 3); (2, 3, -1); (3, -1, 2); (3, 2, -1)\}$.

*Solutia este algoritmica, aplicabila pentru elevii de liceu care au competente de calcul, fara a fi necesare elemente de ingeniozitate.

Prof. Cristian Dragomir