# COMENTARII ÎN LEGĂTURĂ CU ANUMITE PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE ÎN GAZETA MATEMATICĂ

## PARTEA I

AUTOR: PROFESOR COTEA MARIANA EUGENIA

MARTIE 2019

# INTRODUCERE

Gazeta Matematică reprezintă pentru pasionații de matematică ,fie ei copii sau adulți, o bază de antrenare a gândirii ,o sursă de probleme care întrețin flacăra pasiunii incitând la căutare de soluții.

Pentru că munca rezolvitorului nu este de loc una ușoară.Este o căutare permanentă în labirintul cunoașterii iar reușita depinde de perseverența căutătorului,de bagajul lui de cunoștințe,de experiență.

De câte ori nu ni s-a întâmplat să exclamăm:,,Cât de simplă era rezolvarea ! ,,după ce ne căznisem ore în șir ,poate zile în șir pentru a da de capăt unei probleme mai ciudate?În final un artificiu de calcul sau o construcție ajutătoare adecvată sau acea idee de a orienta rezolvarea pe un anumit făgaș au stat la baza ieșirii din impas.În matematică niciodată lucrurile nu sunt cu adevărat simple.Pentru unele probleme putem construi numeroase variante de rezolvare pentru altele este greu să obținem cel puțin o variantă de rezolvare.

Uneori constatăm că anumite probleme admit generalizări,alteori putem construi rezolvări pentru unele probleme care să ne conducă la rezultate mai tari, situație în care vom spune că am îmbunătățit problema respectivă .Sunt și cazuri în care unele probleme sunt incorect formulate,probleme cu ,,defecte,, și atunci este important să găsim defectul pentru a corecta enunțul.Este destul de grea postura de autor de probleme:îți trebuie inspirație,pasiune și talent de căutător.Pentru că înainte de a oferi altora o problemă de dezlegat, tu însăți trebuie să fi făcut o mică descoperire.Am o totală admirație pentru autorii de probleme eu situându-mă de obicei în a doua categorie a rezolvitorilor de probleme.Evident că rezolvând o problemă poate să-ți vină o idee pentru a construi o problemă schimbând părți ale ipotezei sau părți ale concluziei ,dar în această postură rezolvitorul nu poate fi un autor autentic pentru că el își clădește problema pe o idee care nu-i aparține.

PROBLEMA 1

Următoarea problemă C:2885 apare în GM nr 6/2005 la pagina283 fiind o problemă propusă pentru Concursul anual al rezolvitorilor de probleme,nivel gimnazial.

,,Fie triunghiul ABC cu AB=AC și $m(\sphericalangle A) = 20^0$.Să se arate că $\frac{BC}{AB} < \sqrt{\frac{2}{7}}$.,,

OBSERVAȚIE:O abordare diferită față de cea gândită de autor poate determina în unele cazuri o îmbunătățire a problemei în sensul obținerii ,în cazul de față, a unei concluzii mai tari decât cea propusă de autor cu riscul de a avea o demonstrație mai complexă fără însă a utiliza cunoștințe care depășesc programele de gimnaziu(clasele a 7 a,a 8 a).

DEMONSTAȚIE:

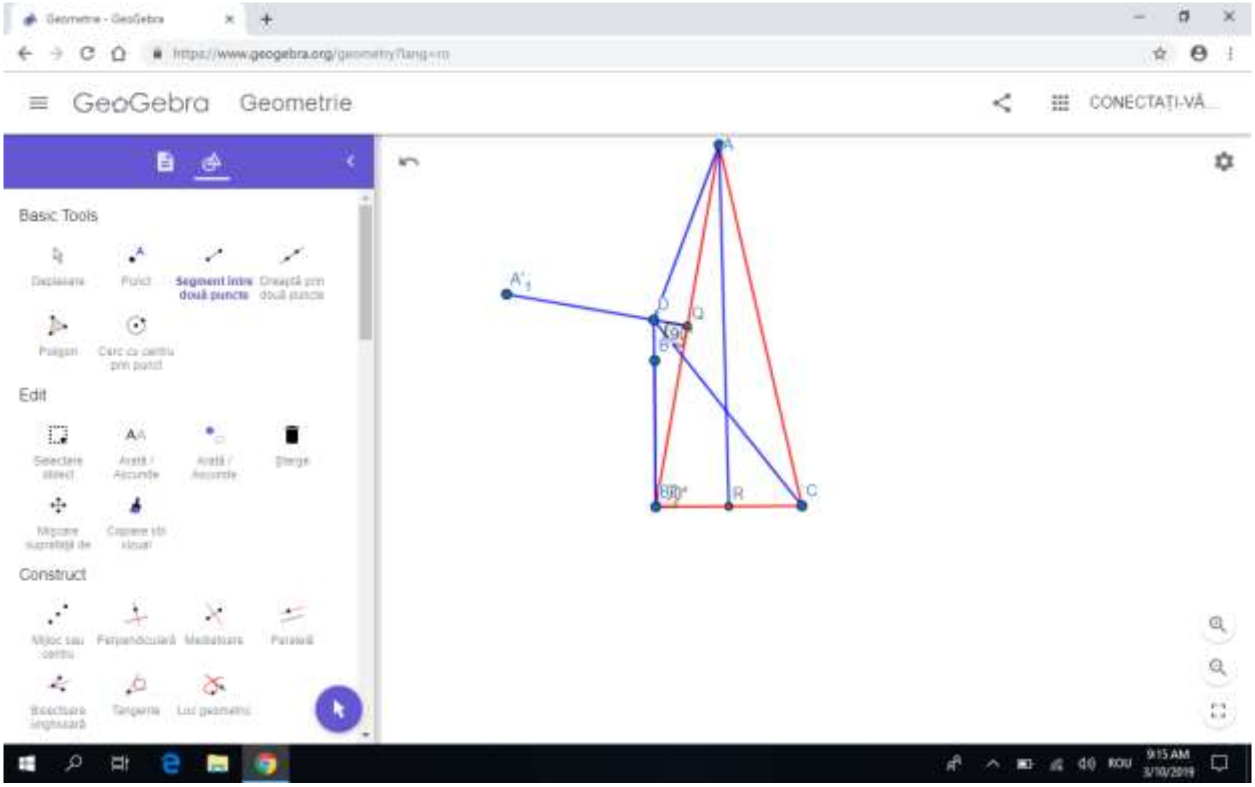
Am realizat următoarea construcție ajutătoare: se construiește punctul D în exteriorul triughiului ABC astfel încât triunghiul DAB este isoscel de bază AB cu măsura unghiului DAB egală cu $10^o$, Q mijlocul lui AB și R mijlocul lui BC.

Deoarece triunghiul ABC este isoscel cu$m(\sphericalangle A) = 20^o$ obținem că

m$(\sphericalangle ABC) = 80^0$.Pe de altă parte deoarece triunghiul DAB este isoscel de bază AB obținem m$(\sphericalangle DBA) = 10^o$ și în consecință $m(DBC) = 90^0$ .

Aplicând teorema lui PITAGORA în triunghiul DBC se obține $DC^2=DB^2+BC^2$(1) Exprimând $\cos 10^o$ din triunghiurile ADQ și ABR obținem:$\frac{AB}{2AD} = \frac{\sqrt{4AB^2-BC^2}}{2AB}$ de unde AD=$\frac{AB^2}{\sqrt{4AB^2-BC^2}}$(2)

--




DESEN

Pe de altă parte din triunghiul DAC cu măsura unghiului A de $30^o$ se obține aplicând teorema cosinusului $DC^2=AD^2+AC^2-AD\cdot AC\cdot\sqrt{3}$ (3)

Din relațiile (1) și (3) ținând cont că DB=AD obținem $BC^2=AC^2-AD\cdot AC\cdot\sqrt{3}$ (4).Din relațiile (2) și (4) obținem ținând cont de faptul că AC=AB următoarea relație:$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1-\frac{AB\sqrt{3}}{\sqrt{4AB^2-BC^2}}$ de unde rezultă

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1-\sqrt{\frac{3}{4-\left(\frac{BC}{AB}\right)^2}} .$$

.Notând cu t=$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2$ obținem $(1-t)^2=\frac{3}{4-t}$.Notând în continuare 1-t =u avem $3u^2+u^3=3$ (5).Deoarece $0<u<1 \ rezultă \ u^3<u^2$ de unde $3u^2+u^3<4u^2$.Prin urmare $3<4u^2 \ deci \ u>\frac{\sqrt{3}}{2}$.Revenind la notația cu t se obține t<1- -$\frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $\frac{BC}{AB}<\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.Mai rămâne să stabilim că $\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}<\sqrt{\frac{2}{7}}$ ceea ce este echivalent cu:1-$\frac{2}{7}<\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{25}{49}<\frac{3}{4}$ (adevărat).Iată că această rezolvare fără să depășească nivelul de cunoștințe al unui elev de clasa a 7a ne-a condus la un rezultat mai tare decât cel propus de autor.Un elev dotat pentru matematică poate să-și pună poblema și în legătură cu o minorare a raportului respectiv plecând de la egalitatea(5) în ideea obținerii de exemplu a primei zecimale a acestui raport.

PROBLEMA 2

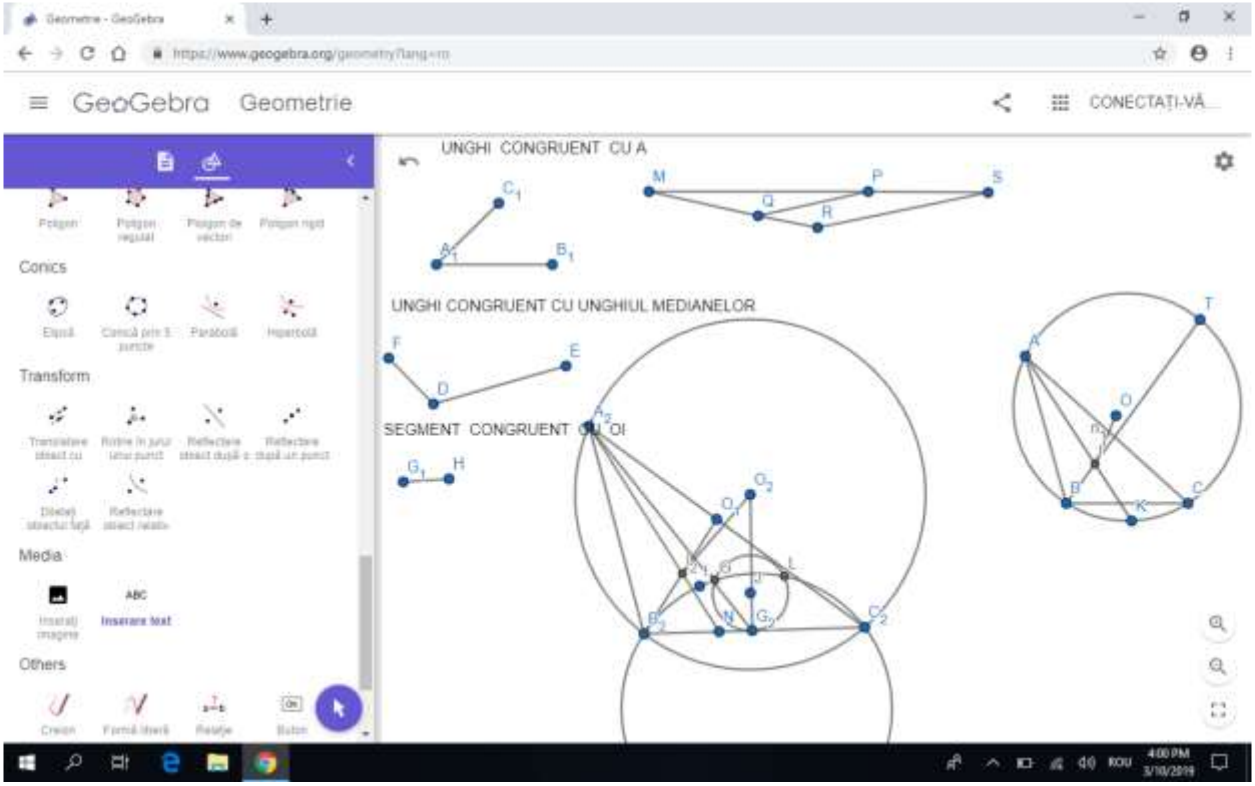
Următoarea problemă apare în GM 7-8/2000 pagina 309 și este o problemă de construcție cu rigla și compasul.Majoritatea problemelor de construcție cu rigla și compasul au la bază cunoașterea unor locuri geometrice ceea ce le transformă în probleme dificil de abordat de majoritatea elevilor.De curând am realizat o lucrare conținând probleme rezolvate cu rigla și compasul și mărturisesc că sunt atrasă de astfel de probleme.

Enunțul problemei este următorul:

C:2297 Construiți un triunghi ABC cunoscând măsura unghiului A,măsura unghiului format de medianele duse din B respectiv C și distanța OI(O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC iar I este centrul cercului înscris)

OBSERVAȚIE:Pentru a fi o veritabilă problemă de construcție cu rigla și compasul putem reformula enunțul solicitând utilizarea celor două instrumente în ipoteza că sunt date unghiuri congruente cu unghiul A, respectiv unghiul format de medianele duse din B respectiv C și un segment congruent cu OI.Se observă că am înlocuit măsurile date(de unghiuri sau segmente) acestea fiind niște numere în strânsă legătură cu anumite unități de măsură care nu sunt precizate în enunț , cu figuri geometrice date.

DESEN




PAȘII CONSTRUCȚIEI sunt următorii:

1) Se construiește un segment oarecare fie acesta $B_2C_2$ ca în desen.

2) Se construiește arcul capabil de unghi $A_1$ dat despre care s-a făcut precizarea că este congruent cu unghiul A al triunghiului de construit,arc subântins de coarda $B_2C_2$ și aflat într-unul din semiplanele determinate de dreapta $B_2C_2$

3) Se construiește arcul capabil de unghi D dat despre care s-a făcut precizarea că este congruent cu unghiul BGC determinat de medianele din B și C,arc subântins de aceeași coardă $B_2C_2$ și aflat în același semiplan față de dreapta $B_2C_2$ ca și arcul de la pasul anterior.

4) Se construiește mediatoarea segmentului $B_2C_2$ și se trasează cu centrul pe această mediatoare la o treime din distanța de la centrul cercului $O_2$ la coarda $B_2C_2$, față de coarda $B_2C_2$ un cerc

de rază egală cu o treime din raza cercului $O_2$ care intersectează arcul capabil construit la pasul 3 în două puncte.

5) Notăm unul din punctele obținute la 4 cu G și intersectăm dreapta determinată de G și mijlocul coardei $B_2C_2$ cu arcul capabil construit la pasul 2 în punctul $A_2$

6) Se construiește triunghiul $A_2B_2C_2$

7) Se construiesc două bisectoare în triunghiul construit anterior și se notează cu $I_2$ punctul lor de intersecție.

8) Se construiește segmentul $O_2I_2$.

9) Utilizând teorema lui lui Thales se construiește un segment notat în desen cu PS astfel încât $\frac{PS}{B_2C_2}=\frac{OI}{O_2I_2}$ ( unde OI reprezintă segmentul dat iar PS determinat este congruent cu latura BC a triunghiului de construit)

10) Se construiește un triunghi ABC asemenea cu triunghiul $A_2B_2C_2$ unde BC=PS(pentru ușurința construcției cele două triunghiuri au laturile respectiv paralele).

PROBLEMA 3

În GM nr10/2005 la pagina 553 apare problema 25410

Enunțul problemei este următorul:

Arătați că pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (o;+\infty)$ cu proprietatea că

$x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ unde $n \in N, n \geq 2$ există inegalitatea :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} \geq \frac{n^3}{n^2-n+1}.$$

OBSERVAȚIE

Înainte de a propune o rezolvare pentru această problemă trebuie să observăm că mulțimea în care iau valori variabilele este (0;1) datorită restricției $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.Voi arăta deasemenea că în inegalitatea dată cazul de egalitate nu se realizează pentru nici un set de valori ale variabilelor care satisfac condițiile din enunț.Acest lucru nu înseamnă că inegalitatea dată este ,,defectă,, pentru că $a \geq b \Leftrightarrow a > b \, sau \, a = b$ iar o disjuncție este adevărată când cel puțin una din propozițiile care o compun este adevărată.

De fapt este interesant de stabilit care este valoarea minimă pe care o poate lua expresia din membrul întâi al inegalității date și cred că orice rezolvitor cu experiență sau care își pune întrebări firești nu va ezita să caute un răspuns la o astfel de întrebare.De precizat că problema se adresează elevilor de clasa a XI a deci putem să utilizăm instrumentele pe care le oferă analiza matematică.

Voi propune următoarea problemă mai generală:

(PG) Arătați că pentru orice $x_1,x_2,\ldots,x_n$€(o;1) cu proprietatea $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ există inegalitatea :

$\frac{1}{\sqrt[t]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[t]{x_n}} \geq \frac{n}{\sqrt[t]{\frac{1}{n}}}$ unde n,t€N și $n \geq 2 \text{ și } t \geq 2$.

DEMONSTRAȚIA LUI (PG)

Fie P(n) proprietatea din enunț.Voi demonstra prin inducție matematică că P(n) este adevărată pentru orice n€N,$n \geq 2$ (t fiind fixat) Vom demonstra mai întâi că P(2) este adevărată.În acest scop voi folosi funcția f:(0;1)→R,f(x)=$\frac{1}{\sqrt[t]{x}}+\frac{1}{\sqrt[t]{1-x}}$ unde legea de corespondență se mai scrie f(x)=$x^{-\frac{1}{t}}+(1-x)^{-\frac{1}{t}}$.

Derivând funcția f se obține f′(x)=$\frac{x^{\frac{t+1}{t}}-(1-x)^{\frac{t+1}{t}}}{t[x(1-x)]^{\frac{t+1}{t}}}$.Se obține că f′(x)>0 dacă x€(1/2;1) și f′(x)<0 dacă x€(0;1/2) și f′(x)=0 dacă x=1/2 prin urmare funcția f admite un minim pentru x=1/2.În consecință f(x)$\geq f(\frac{1}{2})$ adică f(x)$\geq \frac{2}{\sqrt[t]{\frac{1}{2}}}$.Se obține că $\frac{1}{\sqrt[t]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{x_2}}\geq\frac{2}{\sqrt[t]{\frac{1}{2}}}$ pentru orice $x_1,x_2 \in (0;1)$ cu $x_1+x_2=1$ de unde P(2) adevărată.

Demonstrăm în continuare implicația :P(n)⇒P(n+1) .Presupunem prin urmare P(n) adevărată pentru un număr arbitrar n și demonstrăm că P(n+1) este adevărată.

Fie $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1} \in (0;1)$ cu proprietatea $x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}=1$.Notăm cu $k=x_1+x_2+\dots+x_n$.Se obține că $\frac{x_1}{k}+\frac{x_2}{k}+\cdots+\frac{x_n}{k}=1$.Notăm cu $z_i=\frac{x_i}{k}$ pentru orice i de la 1 la n.Deoarece $z_1+z_2+\dots+z_n=1$ putem aplica ipoteza de inducție adică $\frac{1}{\sqrt[t]{z_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{z_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[t]{z_n}}\geq\frac{n}{\sqrt[t]{\frac{1}{n}}}$.(1)

Încercăm în continuare să minorăm suma:$S=\frac{1}{\sqrt[t]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[t]{x_n}}+\frac{1}{\sqrt[t]{x_{n+1}}}$.Se obține $S=\frac{1}{\sqrt[t]{kz_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{kz_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[t]{kz_n}}+\frac{1}{\sqrt[t]{1-k}}=\frac{1}{\sqrt[t]{k}}\left(\frac{1}{\sqrt[t]{z_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{z_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[t]{z_n}}\right)+\frac{1}{\sqrt[t]{1-k}}$.Ținând cont deinegalitatea (1) se obține $S\geq\frac{1}{\sqrt[t]{k}}\cdot\frac{n}{\sqrt[t]{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt[t]{1-k}}$.

Fie g:(0;1)→R, $g(k)=\frac{1}{\sqrt[t]{k}}\cdot\frac{n}{\sqrt[t]{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt[t]{1-k}}$. Derivând funcția g se obține:

$g'(k)=--\frac{1}{t\cdot k^{\frac{t+1}{t}}}\cdot\frac{n}{\sqrt[t]{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{t(1-k)^{\frac{t+1}{t}}}$ de unde $g'(k)=\frac{1}{t}\cdot\frac{k^{\frac{t+1}{t}}-[n(1-k)]^{\frac{t+1}{t}}}{(1-k)^{\frac{t+1}{t}}\cdot k^{\frac{t+1}{t}}}$.

Prin urmare $g'(k)=0 \Leftrightarrow k=n(1-k)\Leftrightarrow k=\frac{n}{n+1}$.Deoarece funcția g′ este negativă pe intervalul $(0;\frac{n}{n+1})$ și pozitivă pe intervalul $(\frac{n}{n+1},1)$ se obține că $g(k)\geq g(\frac{n}{n+1})\Leftrightarrow g(k)\geq\frac{n+1}{\sqrt[t]{\frac{1}{n+1}}}$.Din $S\geq g(k)$ și $g(k)\geq\frac{n+1}{\sqrt[t]{\frac{1}{n+1}}}$ se obține $\frac{1}{\sqrt[t]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[t]{x_n}}+\frac{1}{\sqrt[t]{x_{n+1}}}\geq\frac{n+1}{\sqrt[t]{\frac{1}{n+1}}}$.Prin urmare implicația P(n)⇒P(n+1) este adevărată.În concluzie pentru un t număr natural dat,$t\geq 2$ și pentru orice număr natural $n\geq 2$ avem:

$\frac{1}{\sqrt[t]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[t]{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[t]{x_n}}\geq\frac{n}{\sqrt[t]{\frac{1}{n}}}$. (q,e.d.)Pentru un n oarecare fixat și t=n obținem un minim al expresiei din membrul întâi al inegalității propuse de autorul problemei inițiale și anume:

$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{x_n}} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}$.În continuare se va arăta că $\frac{n}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} > \frac{n^3}{n^2-n+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{n} > \frac{n^2}{n^2-n+1} \Leftrightarrow n > \left(\frac{n^2}{n^2-n+1}\right)^n$(*)

Pentru n=2 inegalitatea (*) este adevărată deoarece $2>\frac{16}{9}$

Pentru n=3 inegalitatea (*) este adevărată deoarece $3>\frac{9^3}{7^3}$

Pentru $n\geq 4$ avem $n\geq 4>\frac{3^3}{2^3}>\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n^2}{n^2-n+1}\right)^n$ prin urmare inegalitatea (*) este adevărată pentru orice n număr natural mai mare sau egal cu 2deci s-a realizat o îmbunătățire a problemei propuse de autor.S-a utilizat faptul că șirul cu termenul general $a_n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$este descrscător.

PROBLEMA 4

În GM 7-8/2002 apare problema 24725 al cărei enunț îl redăm mai jos:

Dacă $x_1,x_2,\ldots,x_n \in (0;\infty)$ și $n\in N$, $n\geq 2$ demonstrați că :

$$\sqrt{x_1}+\sqrt[4]{x_2}+\sqrt[6]{x_3}+\cdots+\sqrt[2n]{x_n} > \sqrt[n(n+1)]{x_1x_2\ldots x_n}$$

OBSERVAȚIE:În general am considerat că problemele care vizează demonstrarea unor inegalități sunt cele mai dificile ele solicitând atât experiență de rezolvitor de probleme de acest tip cât și multă muncă din partea rezolvitorului.Ca și în cazul problemei 3 ne propunem să îmbunătățim inegalitatea respectivă.În acest scop vom nota cu $t_1=\sqrt{x_1}$ , $t_2=\sqrt[4]{x_2}$,...,$t_n=\sqrt[2n]{x_n}$ de unde $x_1=t_1^2$ ,$x_2=t_2^4$ ,…,$x_n = t_n^{2n}$.

Cu aceste notații inegalitatea dată devine:

$$\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{\sqrt[n(n+1)]{t_1^2\cdot t_2^4\cdot\ldots\cdot t_n^{2n}}} > 1 \Leftrightarrow \frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{t_1\cdot t_2^2\cdot\ldots\cdot t_n^n}} > 1$$

Vom arăta prin inducție matematică o inegalitate mai tare:

$\frac{t_1+t_2+\cdots+t_n}{\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{t_1\cdot t_2^2\cdot\ldots\cdot t_n^n}} \geq \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n}}$ (**) egalitatea obținându-se pentru

$t_2 = 2t_1$ , $t_3 = 3t_1, \dots t_n = nt_1$ respectiv cu notațiile inițiale pentru

$x_2 = 2^4 \cdot x_1^2$ , $x_3 = 3^6 \cdot x_1^3$ , …. , $x_n = n^{2n} \cdot x_1^n$

În cele ce urmează vom nota cu S=$t_1 + t_2 + \cdots + t_n$.În ipoteza că S este constantă neprecizată vom demonstra prin inducție matematică inegalitatea (**) notată P(n)

Arătăm mai întâi că P(2) este adevărată.În acest scop considerăm funcția f:(0;∞)→R ,f(t)=$\frac{S}{\sqrt[3]{(S-t)t^2}}$.Se obține f'(t)=$\frac{S(-2tS+3t^2)}{[(S-t)t^2]^{\frac{4}{3}}}$ cu f'(t)=0⇔ $t = \frac{2S}{3}$.Deoarece pe intervalul (0;$\frac{2S}{3}$) funcția f' este negativă și pe intervalul ($\frac{2S}{3}$;∞) funcția f' este pozitivă obținem că f(t)$\geq f\left(\frac{2S}{3}\right)$ $adică$ $f(t) \geq \frac{S}{\sqrt[3]{\left(S-\frac{2S}{3}\right)\frac{4S^2}{9}}} \Leftrightarrow f(t) \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.De aici P(2) este adevărată cu egalitate pentru $t_2=2t_1=\frac{2S}{3}$.

Vom arăta prin inducție matematică implicația P(n)⇒P(n+1)

Pentru S fixat neprecizat așa cum am convenit vom nota, pentru un set de valori $t_1,t_2,\dots,t_n,t_{n+1}$ cu $t_1+t_2+\dots+t_n+t_{n+1}=S$, cu $S_1=t_1+t_2+\dots+t_n$ .

Ținând cont că $\frac{S}{\sqrt[\frac{(n+1)(n+2)}{2}]{t_1 \cdot t_2^2 \cdot \ldots \cdot t_{n+1}^{n+1}}} = \frac{S_1^{\frac{n}{n+2}}}{\left[(t_1 \cdot t_2^2 \cdot \ldots \cdot t_n^n)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right]^{\frac{n}{n+2}}} \cdot \frac{S}{S_1^{\frac{n}{n+2}}} \cdot \frac{1}{t_{n+1}^{\frac{2}{n+2}}}$

și notând cu Q prima expresie obținem Q$\geq \frac{(\frac{n(n+1)}{2})^{\frac{n}{n+2}}}{(2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n)^{\frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2}}} \cdot \frac{S}{S_1^{\frac{n}{n+2}}} \cdot \frac{1}{(S-S_1)^{\frac{2}{n+2}}}$ (***) Observăm că s-a folosit ipoteza de inducție.

Lucrând mai mult membrul 2 al inegalității (***) obținem:

Q$\geq \frac{(\frac{n(n+1)}{2})^{\frac{n}{n+2}}}{(2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n)^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}} \cdot \frac{S}{(S_1{}^n \cdot (S-S_1)^2)^{\frac{1}{n+2}}}$ (1)

Fie în continuare funcția g:(0;$S$)→R unde g(x)=$x^n \cdot (S-x)^2$

Derivând pe g obținem g'(x)=n$x^{n-1} \cdot (S-x)^2 - 2x^n \cdot (S-x) = x^{n-1} \cdot (S-x) \cdot (nS-(n+2)x)$.Se obține că g'(x)=0 dacă și numai dacă x=$\frac{n}{n+2} \cdot S$. Deoarece g' este pozitivă pe (0;$\frac{n}{n+2} \cdot S$) și este negativă pe intervalul

$(\frac{n}{n+2}\cdot S; S)$ obținem că g admite maximumul g$(\frac{n}{n+2}\cdot S)$ prin urmare $\frac{S}{g(x)^{\frac{1}{n+2}}} \geq \frac{S}{g(\frac{n}{n+2}\cdot S)^{\frac{1}{n+2}}}$ .înlocuind pe x cu $S_1$ obținem că :

$$\frac{S}{[S_1^n\cdot(S-S_1)^2]^{\frac{1}{n+2}}} \geq \frac{S}{\left[\left(\frac{n}{n+2}\cdot S\right)^n\cdot\left(S-\frac{n}{n+2}\cdot S\right)^2\right]^{\frac{1}{n+2}}} = \frac{n+2}{n^{\frac{n}{n+2}}\cdot 4^{\frac{1}{n+2}}} \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem $Q \geq \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{(2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n\cdot(n+1)^{n+1})^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}}$

Acest rezultat conduce la concluzia că implicația P(n)⇒P(n+1) este adevărată.Prin urmare inegalitatea mai tare propusă de mine (**) este adevărată pentru orice număr natural n mai mare sau egal cu 2.Mai rămâne de arătat că $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n}} > 1$ (3) pentru orice număr natural n mai mare sau egal cu 2 ceea ce confirmă că inegalitatea (**) este mai tare decât cea propusă de autor.

Pentru a demonstra (3) putem utiliza inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică mai precis:

$\sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n} \leq \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3} < \frac{n(n+1)}{2}$ de unde se obține inegalitatea (3).

PROBLEMA 5

Următoarea problemă este o problemă propusă pentru clasa a VI a în GM 5,6/2003 dar are un grad sporit de dificultate.Enunțul acestei probleme este următorul:

Să se arate că oricare ar fi trei numere raționale strict pozitive x,y,z astfel încât xyz=1 are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1} \leq 1$$

OBSERVAȚIE:Voi da o variantă de rezolvare a acestei probleme și ulterior voi propune un enunț generalizat pentru această problemă pe care îl voi demonstra.

Deoarece $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ și $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy$ $\geq xy$ *se obține că* $x^3+y^3\geq(x+y)xy$.Analog $y^3+z^3\geq(y+z)yz$ *și* $z^3+x^3\geq(z+x)zx$. Notând cu E(x,y,z)= $\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}$ și ținând cont de inegalitățile stabilite anterior obținem: E(x,y,z)≤ $\frac{1}{1+xy(x+y)}+\frac{1}{1+yz(y+z)}+\frac{1}{1+xz(x+z)}$ de unde rezultă, utilizînd ipoteza xyz=1 , E(x,y,z)≤ $\frac{1}{1+\frac{1}{z}\cdot(x+y)}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}\cdot(y+z)}+\frac{1}{1+\frac{1}{y}\cdot(x+z)}\Leftrightarrow E(x,y,z)\leq\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}=1$ cu egalitate pentru x=y=z=1 ceea ce trebuia demonstrate.

GENERALIZAREA pe care o propun este următoarea:

Dacă $x_1,x_2,\dots,x_n$ sunt numere reale pozitive și $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$ atunci $\frac{1}{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n+1}+\frac{1}{x_2^n+x_3^n+\cdots+x_n^n+1}+\cdots+\frac{1}{x_n^n+x_{n-2}^n+\cdots+x_1^n+1}\leq 1$

Pentru demonstrarea acestui enunț generalizat utilizăm inegalitatea generalizată a mediilor pentru sumele de puteri de la numitorul fiecărui termen al sumei din membrul stâng al inegalității de mai sus,fie aceasta $E(x_1,x_2,\dots,x_n)$.Astfel pentru suma de puteri de la numitorul primului termen avem

$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n}{n-1}\geq\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n\Leftrightarrow x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n\geq$
$(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\geq(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}$ .În mod asemănător se vor minora celelalte sume de puteri obținând astfel:

$$E(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq\frac{1}{1+(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}}+\frac{1}{1+(x_2+x_3+\cdots x_n).x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}+\cdots+\frac{1}{1+(x_n+x_{n-2}+\cdots+x_1)\cdot x_n\cdot x_{n-2}\cdot\ldots\cdot x_1}$$

Dacă utilizăm condiția ca produsul celor n variabile să fie 1 se obține următoarea inegalitate:

$E(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq\frac{1}{1+(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})\cdot\frac{1}{x_n}}+\frac{1}{1+(x_2+x_3+\cdots+x_n)\cdot\frac{1}{x_1}}+\cdots+\frac{1}{1+(x_n+x_{n-2}+\cdots+x_1)\cdot\frac{1}{x_{n-1}}}$ de unde rezultă:

$E(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_1+x_2+\cdots.+x_n}=1$ ceea ce trebuia demonstrat.

PROBLEMA 6

În GM nr. 11/2004,pagina 431 apare următoarea problemă:

Fie a,b,c numere reale strict pozitive astfel încât a+b+c=1.

Să se arate că :$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$.

OBSERVAȚIE:Problema este preluată din REVISTA KVANT.

În cele ce urmează vă prezint un enunț generalizat al acestei probleme pe care îl voi demonstra:

Pentru orice n+1 numere reale strict pozitive $a_1,a_2,\dots,a_{n+1}$ cu proprietatea $a_1+a_2+\dots+a_{n+1}=1$ (*) are loc următoarea inegalitate:

$$\frac{n}{1-a_1}+\frac{n}{1-a_2}+\cdots+\frac{n}{1-a_{n+1}}\geq\frac{n+2}{1+a_1}+\frac{n+2}{1+a_2}+\cdots+\frac{n+2}{1+a_{n+1}}\ (**)$$

Demonstrația pe care o propun se bazează pe aducerea inegalității de demonstrat la o formă echivalentă despre care putem stabili cu ușurință valoarea de adevăr ținând cont de condiția (*)

Astfel inegalitatea (**)$\Leftrightarrow\frac{n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}+\frac{n}{a_1+a_3+\cdots+a_{n+1}}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geq$ $\frac{n+2}{2a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}+\frac{n+2}{2a_2+a_1+a_3+\cdots+a_{n+1}}+\cdots+\frac{n+2}{2a_{n+1}+a_1+\cdots+a_n}\Leftrightarrow\left(\frac{n}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}-\frac{n+2}{2a_1+a_2+\cdots.+a_{n+1}}\right)+$ $\left(\frac{n}{a_1+a_3+\cdots+a_{n+1}}-\frac{n+2}{2a_2+a_1+a_3+\cdots+a_{n+1}}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-\frac{n+2}{2a_{n+1}+a_1+\cdots.+a_n}\right)\geq 0\Leftrightarrow$ $\frac{2(a_1-a_2)+2(a_1-a_3)+\cdots+2(a_1-a_{n+1})}{(1-a_1)(1+a_1)}+\frac{2(a_2-a_1)+2(a_2-a_3)+\cdots.+2(a_2-a_{n+1})}{(1-a_2)(1+a_2)}+$ $\cdots.+\frac{2(a_{n+1}-a_1)+2(a_{n+1}-a_2)+\cdots+2(a_{n+1}-a_n)}{(1-a_{n+1})(1+a_{n+1})}\geq 0\Leftrightarrow(a_1-a_2)\left(\frac{1}{1-a_1^2}-\frac{1}{1-a_2^2}\right)+(a_1-a_3)\left(\frac{1}{1-a_1^2}-\frac{1}{1-a_3^2}\right)+$ $\cdots+(a_n-a_{n+1})(\frac{1}{1-a_n^2}-\frac{1}{1-a_{n+1}^2})\geq 0$

Ultima inegalitate este adevărată.

Problema 7

În cele ce urmează vă prezint o problemă care apare în GM nr 12/2003.Am ales această problemă deoarece modul ei de rezolvare ne conduce la obținerea imediată a unei generalizări.

Enunțul problemei este următorul:

Dacă a,b,c$> 0$ $să\ se\ arate\ că$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$(*)

Ideea de rezolvare se bazează pe observarea inegalității de demonstrat în cazul particular a=b=c.

În acest caz particular obținem că (*) este echivalentă cu:

$\frac{3}{a^2}+3\geq 2\cdot\frac{3}{a}\Leftrightarrow a^2-2a+1\geq 0$ ultima inegalitate fiind adevărată.

Ideea de bază este utilizarea inegalității :$\frac{1}{a^2}+1\geq\frac{2}{a}$ (1) și analoagele:

$\frac{1}{b^2}+1\geq\frac{2}{b}$ (2)

$\frac{1}{c^2}+1\geq\frac{2}{c}$(3)

Din relațiile (1),(2),(3) obținem prin adunare membru cu membru următoarea inegalitate: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$(4)

Pe de altă parte utilizând inegalitatea $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}$ și analoagele obținem prin adunare membru cu membru $2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 2(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}})$(5)

Din relațiile (4) și (5) obținem inegalitatea (*) de demonstrat.

Urmărind modul de rezolvare putem să ne gândim la următoarea generalizare:$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}+n\geq 2(\frac{1}{\sqrt{a_1\cdot a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2\cdot a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n\cdot a_1}})$

PROBLEMA 8

Următoarea problemă apare împreună cu rezolvarea ei în GM nr 12/2005,la pagina 635.Așa cum voi arăta ulterior problema poate fi îmbunătățită prin obținerea unei inegalități mai tari decât cea propusă de autor.

Enunțul problemei este următorul:

Dacă n€N,n$\geq 2, a>0, b>0. c>0,$ să se arate că:

$$\sqrt[n]{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt[n]{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}}+\sqrt[n]{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{3(n-1)}{n}$$

Când are loc egalitatea?

În cele ce urmează voi prezenta rezolvarea autorului:

REZOLVAREA AUTORULUI:

Conform inegalității mediilor avem:

$$\sqrt[n]{\frac{ab}{(a+b)(b+c)}}=\sqrt[n]{\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+c}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}\leq\frac{1}{n}(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+(n-2))$$

Respectiv:

$\sqrt[n]{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}}\leq\frac{1}{n}(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+(n-2))$ și

$\sqrt[n]{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{1}{n}(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+(n-2))$

Prin însumarea acestor inegalități se obține concluzia.Egalitatea are loc atunci când $\frac{a}{a+c}=\frac{b}{b+c}=\frac{a}{a+b}=\frac{c}{b+c}=\frac{b}{a+b}=\frac{c}{a+c}(=1\ \ pentru\ \ n\geq 3)$

Așadar

pentru $n\geq 3\ \ inegalitatea\ \ este\ \ strictă, iar\ \ pentru\ \ n=2\ egalitatea\ \ are\ \ loc\ \ pentru\ \ a=b=c$

OBSERVAȚIE Dacă plecăm cu finalul rezolvării făcute de autor și anume se concluzionează că pentru n mai mare sau egal cu 3 inegalitatea este strictă și că se realizează egalitatea doar în cazul n=2 pentru a=b=c întrebarea firească este care este maximumul expresiei din stânga inegalității pentru n fixat (n$\geq 3$)și a,b,c variabile și pozitive și când se atinge?

Pentru a răspunde la această întrebare am folosit inegalitatea generalizată a mediilor

$$\left(\frac{\sqrt[n]{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt[n]{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}}+\sqrt[n]{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}}{3}\right)^n \leq \left(\frac{\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}}{3}\right)^2 \leq \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$ de aici se obține că:

$\sqrt[n]{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} + \sqrt[n]{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}} + \sqrt[n]{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ cu egalitate pentru a=b=c.Rămâne să arătăm că $3 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{4}} < \frac{3(n-1)}{n}$ ceea ce este echivalent cu $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n < 4$ *ceea ce este adevărat pentru că* șirul cu termenul general membrul întâi al inegalității este descrescător și prin urmare:

$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3 < 4$ pentru oricare n mai mare sau egal cu 3.

PROBLEMA 9

În GM 1/2001 apare rezolvată problema 24323 din GM nr5-6/2000 pagina 245.

Redăm mai jos enunțul acestei probleme:

Fie a,b,c$\in (0;\infty)$ astfel încât a+b+c=1.Să se arate că :

$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.

OBSERVAȚIE:

Rezolvarea propusă de autor utilizează în mod esențial faptul că a+b+c=1 dar în realitate această inegalitate este adevărată pentru orice a,b,c numere reale pozitive.

În cele ce urmează voi propune o altă formă a inegalității propuse de autor urmând să demonstrez un enunț generalizat plecând de la această formă.

$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2+\frac{b}{a}} + \frac{1}{2+\frac{c}{b}} + \frac{1}{2+\frac{a}{c}} \leq 1$(*)

Cu notația $x = \frac{b}{a},\ y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$ inegalitatea (*) este echivalentă cu:

$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} \leq 1$ pentru orice numere reale pozitive x,y,z cu xyz=1.Voi demonstra următorul enunț generalizat:$\frac{1}{t+x_1} + \frac{1}{t+x_2} + \cdots + \frac{1}{t+x_n} \leq \frac{n}{t+1}$ pentru orice număr real t mai mare sau egal cu n-1 și pentru orice numere pozitive $x_1,x_2,\ldots,x_n$ cu $x_1x_2\ldots x_n=1$.

Voi face o demonstrație prin inducție matematică.Notăm cu P(n) proprietatea exprimată de enunțul generalizat.

Demonstrăm P(2) ,Fie în acest scop funcția f:$(0;\infty)\to R,\ f(x)=\frac{1}{t+x}+\frac{1}{t+\frac{1}{x}}$.Derivând funcția obținem $f'(x)=-\frac{1}{(t+x)^2}+\frac{1}{(tx+1)^2}$ unde t este fixat mai mare decât 1.Din analiza semnului derivatei se obține : $f'(x)>0$ pentru $x<1$ ,$f'(x)<0$ pentru $x>1$ și $f'(1)=0$.Prin urmare funcția admite maxim pentru x=1 deci $\frac{1}{t+x}+\frac{1}{t+\frac{1}{x}}\le\frac{2}{t+1}$ pentru orice număr real pozitiv x.Rezultă că $\frac{1}{t+x_1}+\frac{1}{t+x_2}\le\frac{2}{t+1}$ pentru orice două numere reale pozitive $x_1,x_2$ cu $x_1x_2=1$ deci P(2) este adevărată.

Demonstrăm în continuare implicația P(n)⇒P(n+1)

Fie în continuare n+1 numere reale pozitive $x_1,x_2,\ldots,\cancel{x}_n,x_{n+1}$ al căror produs este 1 și $t\ge n$.Există prin urmare un indice p pentru care $x_p\ge 1$.

Printr-o renumerotare putem considera $x_{n+1}\ge 1$.Se obține că :

$x_1x_2\ldots x_n=m\le 1$ Vom nota în continuare $z_1=\frac{x_1}{\sqrt[n]{m}}$ ,$z_2=\frac{x_2}{\sqrt[n]{m}}$ ,…,$z_n=\frac{x_n}{\sqrt[n]{m}}$.Se observă că $z_1z_2\ldots z_n=1$.Cu aceste notații obținem că:

$$\frac{1}{t+x_1}+\frac{1}{t+x_2}+\cdots+\frac{1}{t+x_n}+\frac{1}{t+x_{n+1}}=\frac{1}{t+z_1\cdot\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{t+z_2\cdot\sqrt[n]{m}}+\cdots+\frac{1}{t+z_n\cdot\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{t+\frac{1}{m}}=\frac{1}{\sqrt[n]{m}(\frac{t}{\sqrt[n]{m}}+z_1)}+\frac{1}{\sqrt[n]{m}(\frac{t}{\sqrt[n]{m}}+z_2)}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{m}(\frac{t}{\sqrt[n]{m}}+z_n)}+\frac{1}{t+\frac{1}{m}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{m}}\cdot\left(\frac{1}{\frac{t}{\sqrt[n]{m}}+z_1}+\frac{1}{\frac{t}{\sqrt[n]{m}}+z_2}+\cdots+\frac{1}{\frac{t}{\sqrt[n]{m}}+z_n}\right)+\frac{1}{t+\frac{1}{m}}.$$

Deoarece m este mai mic sau egal cu 1 se obține că $\frac{t}{\sqrt[n]{m}}\ge t\ge n$ prin urmare putem aplica ipoteza de inducție pentru $z_1,z_2,\ldots,z_n$ obținându-se astfel:

$$\frac{1}{t+x_1}+\frac{1}{t+x_2}+\cdots+\frac{1}{t+x_n}+\frac{1}{t+x_{n+1}}\le\frac{n}{t+\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{t+\frac{1}{m}}\quad(1)$$

În continuare se analizează funcția g:$(0;1] \to R$ , $g(x) = \frac{n}{t+\sqrt[n]{x}} + \frac{1}{t+\frac{1}{x}}$

Se obține că g'(x)=- $\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}\cdot(t+\sqrt[n]{x})^2}$+$\frac{1}{(tx+1)^2}$.Se poate constata că semnul lui g'(x) este dat de semnul expresiei:$x^{\frac{n-1}{2n}}(t+\sqrt[n]{x})$- (tx+1)=$x^{\frac{n-1}{2n}}t + x^{\frac{n+1}{2n}} - tx - 1 = tx^{\frac{n-1}{2n}} \cdot \left(1 - x^{\frac{n+1}{2n}}\right) - \left(1 - x^{\frac{n+1}{2n}}\right) = (1 - x^{\frac{n+1}{2n}})(tx^{\frac{n-1}{2n}} - 1)$.Din analiza semnului lui g' se obține că g'(x)<0 pentru x€(0;$\frac{1}{t^{\frac{2n}{n-1}}}$) ,g'(x)>0 dacă x€($\frac{1}{t^{\frac{2n}{n-1}}}$;0) și g'($\frac{1}{t^{\frac{2n}{n-1}}}$)=g'(1)=0.

Deoarece funcția este strict descrescătoare pe primul interval și strict crescătoare pe al doilea interval și limita funcției g în 0 este $\frac{n}{t}$ iar g(1)=$\frac{n+1}{t+1}$ iar $\frac{n}{t} \leq \frac{n+1}{t+1} \Leftrightarrow n \leq t\ (adevărat)$ se obține că g(x)≤ $\frac{n+1}{t+1}$ (2). Din (1) și (2) se obține că P(n+1) este adevărată .Prin urmare P(n) este adevărată pentru orice număr natural n mai mare sau egal cu 2.

PROBLEMA 10

În GM nr2/2006,pagina 103 apare problema 25486 cu următorul enunț:

Într-un tetraedru numim secțiune mediană,secțiunea determinată de planul care conține o muchie a tetraedrului și care trece prin mijlocul muchiei opuse acesteia.Să se arate că nu există un tetraedru pentru care cele 6 secțiuni mediane să fie simultan triunghiuri echilaterale.

OBSERVAȚIE :

Voi propune următorul enunț îmbunătățit :Să se arate că un tetraedru are cel mult 4 secțiuni mediane triunghiuri echilaterale.

(*) Într-o primă etapă voi arăta că există tetraedre cu 4 secțiuni mediane triunghiuri echilaterale.

(**) În a doua etapă voi arăta că nu există tetraedre pentru care secțiunile mediane determinate de cele trei muchii care pleacă din același vârf să fie simultan triunghiuri echilaterale.

(***)În a treia etapă se arată că nu există tetraedre care să aibă 5 secțiuni mediane triunghiuri echilaterale.

ETAPA I

Vom construi un tetraedru ABCD cu 4 secțiuni mediane triunghiuri echilaterale astfel.Toate fețele tetraedrului sunt triunghiuri isoscele congruente în felul următor: (1)ACD isoscel de bază AC cu medianele duse din A,C congruente cu laturile congruente ale triunghiului isoscel , DC și DA.(2) ABC isoscel ,ABC congruent cu ADC. (3) DCB isoscel congruent cu ADC(4) DAB isoscel congruent cu ADC.

Secțiunile mediane determinate de laturile congruente ale celor patru triunghiuri isoscele și mijloacele muchiilor opuse acestor laturi sunt triunghiuri echilaterale.Într-adevăr se observă că fiecare secțiune de acest tip este determinată de o muchie din grupul celor 4 muchii congruente și de două mediane congruente cu aceste muchii din condițiile impuse la construcția tetraedrului.

ETAPA A II A

Presupunem prin reducere la absurd că există un tetraedru ABCD pentru care există trei secțiuni mediane determinate de trei muchii care pleacă din același vârf( fie acestea AB,AC,AD) triunghiuri echilaterale.Dacă notăm cu M,N,P mijloacele muchiilor CD,BC,BD aceste secțiuni sunt triunghiurile ABM,AND,ACP.Dacă notăm cu O piciorul înălțimii tetraedrului dusă din A obținem din teorema oblicelor congruente că OB=OM=x, OC=OP=y ,ON=OD=z

Aplicând teorema medianei în triunghiurile : COD pentru OM mediană,în triunghiul BOC pentru ON mediană, în triunghiul BOD pentru OP mediană obținem relațiile.

$4OM^2=2(OC^2+OD^2)-CD^2$ de unde $4x^2=2(y^2+z^2)-CD^2$

$4ON^2=2(OB^2+OC^2)-BC^2$ de unde $4z^2=2(x^2+y^2)-BC^2$

$4OP^2=2(OB^2+OD^2)-BD^2$ de unde $4y^2=2(x^2+z^2)-BD^2$

Prin adunare membru cu membru a celor 4 relații obținem:

$CD^2+BD^2+BC^2=0$ ( fals) prin urmare presupunerea făcută este falsă deci nu există tetraedre pentru care secțiunile mediane determinate de muchiile care pleacă din același vârf să fie triunghiuri echilaterale simultan.

ETAPA A III A

Fie ABCD un tetraedru și AB,AC,AD,BC,BD 5 muchii ale sale.Se observă că există trei muchii care pleacă din același vârf deci nu este posibil ca cele 5 secțiuni mediane să fie simultan triunghiuri echilaterale deoarece conform etapei a doua nu există tetraedre pentru care secțiunile mediane determinate de muchiile care pleacă din același vârf să fie simultan triunghiuri echilaterale.

De remarcat că indiferent de alegerea celor 5 muchii există trei muchii care pleacă din același vârf.

Iată că s-a realizat o îmbunătățire a problemei în sensul stabilirii numărului maxim al secțiunilor mediane triunghiuri echilaterale într-un tetraedru.

AUTOR: PROFESOR COTEA MARIANA EUGENIA

MARTIE 2019