

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022****CLASA a VI-a**

**Problema 1.** Considerăm numerele naturale  $n - 1$ ,  $2n - 1$  și  $n^2 + 3$ , unde  $n \geq 3$  este un număr natural.

a) Arătați că există o singură valoare a lui  $n$  pentru care toate numerele considerate sunt prime.

b) Arătați că există o infinitate de valori ale lui  $n$  pentru care toate numerele considerate sunt compuse.

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Determinați perechile  $(A, B)$  de mulțimi care au elementele numere naturale nenule și care verifică simultan următoarele proprietăți:

- fiecare din mulțimile  $A$  și  $B$  are trei elemente;
- mulțimea  $A \cap B$  are exact un element;
- $6 \in A$  și  $12 \in B$ ;
- dacă  $x, y \in A$  și  $x \neq y$ , atunci  $x \cdot y \in B$ .

**Problema 3.** Determinați numerele naturale nenule  $a, b, c, d$  pentru care  $a \leq b \leq c$  și

$$2^a + 2^b + 2^c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d.$$

**Problema 4.** Considerăm triunghiul  $ABC$  cu unghiul  $\angle BAC$  ascuțit. Construim în exteriorul triunghiului punctele  $D$  și  $E$  astfel încât  $AD = AC$ ,  $AE = AB$ ,  $D$  și  $B$  sunt de aceeași parte a dreptei  $AC$ ,  $E$  și  $C$  sunt de aceeași parte a dreptei  $AB$  și  $\angle DAC = \angle BAE = 120^\circ + \frac{2}{3}\angle BAC$ . Fie  $P$  intersecția dreptelor  $BE$  și  $CD$ . Demonstrați că:

- dreptele  $AE$  și  $CD$  sunt perpendiculare;
- dreptele  $PA$  și  $DE$  sunt perpendiculare.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări  
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*